

**Наталія ЛУЦЬКА,
Тетяна САВЧЕНКО**

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ СИСТЕМИ УПРАВЛІННЯ ТЕХНОЛОГІЧНИМ ОБ'ЄКТОМ ХАРЧОВОГО ПІДПРИЄМСТВА

Обґрунтовано доцільність застосування оптимального керування для об'єктів харчової промисловості. Запропоновано алгоритм оптимізації планування ресурсами виробництва, зокрема, розглянуто синтез оптимального керування технологічним агрегатом. Наведено математичні моделі об'єктів, які використовуються для оптимізації. На прикладі теплообмінника визначено оптимальні траєкторію системи та керування, вказані переваги адаптивної системи керування перед локальною.

Ключові слова: технологічний комплекс, об'єкт, математична модель, оптимальне керування, оптимальне планування, критерій.

© Наталія Луцька, Тетяна Савченко, 2015

Луцкая Н., Савченко Т. Математическое моделирование системы управления технологическим объектом пищевого предприятия. Обоснована целесообразность применения оптимального управления для объектов пищевой промышленности. Предложен алгоритм оптимизации планирования ресурсами производства, рассмотрен синтез оптимального управления технологическим агрегатом. Представлены математические модели объектов, используемых для оптимизации. На примере теплообменника определены оптимальные траектория системы и управление, указаны преимущества адаптивной системы управления перед локальной.

Ключевые слова: технологический комплекс, объект, математическая модель, оптимальное управление, оптимальное планирование, критерий.

Постановка проблеми. Сучасні підприємства харчової промисловості висувають високі вимоги до забезпечення ресурсами відповідної якості, узгодження за часом і місцем проведення сукупності технологічних процесів, а також до систем управління рівнів, які реалізують функції планування, організації та керування на всіх стадіях. Особливе значення має контроль якості сировини, яка надходить на підприємство, її раціональне використання та контроль якості готової продукції. Першочерговими є вимоги щодо підвищення оперативності та достовірності виробничої інформації, поліпшення прогнозування результатів діяльності підприємства з використання основних ресурсів – матеріальних, трудових, енергетичних.

Оперативне вирішення таких завдань потребує з одного боку створення системи оптимального планування та управління на основі економіко-математичних методів, з іншого – автоматизованої системи збору, надання та зберігання виробничої інформації для оперативного контролю й аналізу виробництва. Крім того, нові вимоги ставляться до систем автоматизації технологічних процесів.

Отже, управління необхідно здійснювати не окремими процесами, агрегатами та дільницями, а технологічними комплексами в цілому, тобто використовуючи принципи інтеграції та розподіленого управління, що складає основу комп'ютерно-інтегрованого виробництва як єдиної системи. Остання об'єднує різні підрозділи підприємства з використанням спільної бази даних і локальних мереж різних рівнів і призначення. Все це потребує досконалого алгоритмічного та програмного забезпечення створених систем автоматизації. Спеціальні види забезпечення орієнтуються на розв'язуванні задачі з урахуванням особливостей об'єктів управління.

Технологічні комплекси (ТК) харчових виробництв з точки зору задач управління відрізняються багатовимірністю, наявністю окремих стадій переробки сировини та напівфабрикатів, складними зв'язками між стадіями, які реалізуються на технологічному обладнанні великої одиничної потужності. При цьому автоматизація окремих стадій ТК (дільниць, підсистем) не дає можливості досягти високих техніко-

економічних показників роботи в цілому, оскільки вони залежать від взаємних зв'язків між підсистемами ТК.

Названі підходи та наявні технічні засоби створюють принципово нові можливості щодо підвищення оперативності управління, прийняття рішень в умовах невизначеності та дефіциту часу й розробці автоматизованих технологічних комплексів підвищеної надійності. Створюються нові умови оптимізації процесу управління, поліпшення взаємодії оператора з технічними засобами. Разом з тим виникають проблеми науково-технічного характеру, пов'язані зі створенням системи управління ТК із високими експлуатаційними характеристиками: визначення оптимальної технічної та формування функціональної структури, вирішення задач із критеріями оптимальності, математичними моделями та обмеженнями, вибір технічних засобів і розподіл задач між ними тощо. Ці проблеми необхідно вирішувати на базі детального вивчення характеристик об'єкта управління, показників його функціонування [1].

Техніко-економічна суть задачі оптимізації ТК підприємства харчової промисловості полягає у визначенні навантажень і режимів проведення кожної технологічної операції, найбільш доцільних з точки зору всього комплексу, в узгодженні локальних цілей кожної технологічної операції з глобальною метою всього комплексу.

Суттєвою особливістю ТК є взаємозв'язок і взаємовплив установок одна на одну, що враховується у постановці задачі оптимізації роботи технологічного комплексу: для кожної установки або технологічного процесу визначити, скільки і якого виду вихідної сировини переробити, скільки та якої якості продукції отримати, як і в якій кількості розподілити сировину між цехами, щоб отримати оптимальне значення обраного критерію для всього ТК, зокрема прибутку.

Процес виробництва багатоасортиментної продукції за рахунок наявності складних зв'язків, що виникають при плануванні та оперативному управлінні діяльністю підрозділів підприємства, важко описати якоюсь однією моделлю. Саме тому економічні процеси описують за допомогою комплексу фундаментальних взаємопов'язаних економіко-математичних моделей, який може використовуватися в плануванні та економічному аналізі виробництва багатоасортиментної продукції.

Загальна теорія систем базується на роботах Ю. П. Маркіна [1], І. Л. Акуліча [2], Р. А. Алієва [3; 4] тощо. Аналіз інтелектуальних та експертних систем проведено в роботах О. Ф. Волошина [5], М. З. Згуровського [6], Є. Н. Федорчука [7] та ін.

Після оптимального планування переходять до оптимізації кожної технологічної складової ТК. Причому критерії керування на цьому етапі повинні бути узгоджені з попередніми критеріями та не суперечувати їм. На відміну від задачі планування, оптимальне керування технологічним агрегатом виконується в плинному часі та враховує неперервність процесу.

Мета дослідження – створення умов для підвищення якості продуктів харчування та зменшення витрат енергоносіїв шляхом розробки оптимальної системи керування технологічним агрегатом як складової ТК з адаптацією об'єкта до змінюваних умов експлуатації.

Матеріали та методи. Проведено аналіз математичної моделі планування основного виробництва. Постановка завдань виробничої програми підприємства зводиться до знаходження такого вектора виробництва (завантаження обладнання, варіантів роботи технологічних установок, рецептури тощо), який забезпечує екстремум вибраного критерію оптимізації та виконання обмежень, що накладаються під час виробництва.

Для розв'язання задачі оптимального керування технологічним агрегатом застосовано варіаційний метод, який спирається на використання сучасної обчислювальної техніки, а теоретичною основою є оптимальне керування системами із зосередженими та розподіленими параметрами, ідентифікація та оцінка стану, чутливості та керованості. Її результати застосовуються до широкого класу реальних об'єктів, які описуються диференціальними, інтегральними та іншими рівняннями.

Результати дослідження. Математична модель *оптимального оперативного планування* основного виробництва харчового підприємства описується у вигляді цільової функції та системи змішаних обмежень, які складаються з рівнянь і нерівностей. У рівняннях враховано, що замовлення на готову продукцію повністю задовольняють попит споживачів за обсягом і асортиментом на кожну годину; нерівності – що корисні фонди часу роботи обладнання та обсяги виробництва готових продуктів і напівфабрикатів – лімітовані [2; 8].

Задачу *оптимального керування* технологічним агрегатом розглянемо на прикладі кожухотрубного теплообмінника. Теплообмінна апаратура широко використовується на харчових підприємствах. Значна частка їхньої ефективної роботи залежить не лише від оптимального вибору апарата, що відбувається на етапі проектування виробництва, а й від автоматичного підтримання регульованої змінної на заданому рівні [9]. На сьогодні при регулюванні такими об'єктами використовуються П-, ПІ- або ПІД-регулятори, причому найбільш розповсюджені ПІ-алгоритми [10]. Оскільки вони побудовані за принципом зворотного зв'язку, для забезпечення грубості системи їх налаштування, як правило, зміщено від оптимальних значень. Окрім того, в багатьох системах регулювання ще не усунено ефект інтегрального насичення. Все це призводить до перевитрат енергоносіїв і значних викидів технологічної змінної на перехідній характеристиці, що в багатьох випадках погіршує якість продукту.

У нашому дослідженні необхідно знайти оптимальну траєкторію для кожухотрубного теплообмінника, математична модель якого описується системою диференціальних рівнянь у відхиленнях:

$$\begin{cases} 10 \frac{d\Delta\theta}{dt} + \Delta\theta = 0.8\Delta\theta_n, \\ 4 \frac{d\Delta\theta_n}{dt} + \Delta\theta_n = 9\Delta G_n, \end{cases} \quad (1)$$

де *перше* рівняння описує ємність рідини, яка нагрівається, *друге* – ємність теплоносія (пари); $\Delta\theta$ – зміна температури рідини; $\Delta\theta_n$ – зміна температури пари; ΔG_n – зміна витрат пари, яка надходить до міжтрубного простору; t – тривалість процесу.

Оптимальне керування повинно переводити об'єкт із початкового стану $\Delta\theta = 4^\circ\text{C}$, $\Delta\theta_n = 5^\circ\text{C}$ до кінцевого при $\Delta\theta = 15^\circ\text{C}$ за час керування $t \in [0,30]$ с із мінімальними затратами на управління. Ця оптимізаційна задача однозначно пов'язана з раціональним використанням теплової енергії, і оптимальне керування отримується у вигляді програми, що усуває подальше дослідження системи на стійкість.

Відомі різні методи розв'язання задач оптимального керування технологічним агрегатом: варіаційного числення, динамічного або математичного програмування, за принципом максимуму Л. С. Понтрягіна [6]. Перевага варіаційного методу – простота та швидкість розрахунку, недолік – неврахування існуючих обмежень. Проте за допомогою штучних прийомів цей недолік можна усунути [11]. Принцип максимуму є найбільш застосовуваним методом оптимізації, але він має суттєвий недолік – необхідно вирішувати складну крайову задачу, яка не завжди розв'язується обраним методом [12]. Із урахуванням того, що задача оптимізації розв'язуватиметься в реальному часі, при використанні принципу максимуму існує можливість довготривалого очікування результату або не отримання його взагалі. Методи динамічного та математичного програмування досить громіздкі, а швидкість їх розв'язання порівняно велика.

Отже, для розв'язання задачі оптимального керування використано варіаційний метод, а для врахування змінюваних умов експлуатації об'єкта створена структура адаптивної оптимальної системи керування технологічним агрегатом як складової ТК.

Задача оптимального програмного керування вирішується методом варіаційного числення, зокрема, використовуючи варіаційну задачу Лагранжа на мінімум [13], де критерій оптимізації має вигляд:

$$I = \int_0^{30} (\Delta G_n)^2 dt \rightarrow \min. \quad (2)$$

Спочатку перейдемо до безрозмірних величин: $x_1 = \Delta\theta$, $x_2 = \Delta\theta_n$; $u = \Delta G_n$, тоді математична модель об'єкта матиме такий вигляд:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -0.1x_1 + 0.08x_2, \\ \dot{x}_2 = -0.25x_2 + 2.25u; \end{cases} \quad (3)$$

з початковими та кінцевими умовами:

$$\begin{aligned} x_1(0) &= 4, \quad x_1(30) = 15, \\ x_2(0) &= 5; \end{aligned} \quad (4)$$

а критерій керування –

$$I = \int_0^{30} u^2 dt. \quad (5)$$

Зведемо її до безумовної оптимізації, для чого побудуємо допоміжну функцію:

$$F_1(x_1, x_2, \dot{x}_1, \dot{x}_2, u, \lambda_1, \lambda_2, t) = u^2 + \lambda_1(-0.1x_1 + 0.08x_2 - \dot{x}_1) + \lambda_2(-0.25x_2 + 2.25u - \dot{x}_2),$$

звідки знаходимо оптимальне керування ($\frac{\partial F_1}{\partial u} = 0$):

$$2u + 2.25\lambda_2 = 0,$$

тобто

$$u = -1.125\lambda_2. \quad (6)$$

Перевіримо одержане оптимальне керування на достатність:

$$\frac{\partial^2 [u^2 + \lambda_1(-0.1x_1 + 0.08x_2) + \lambda_2(-0.25x_2 + 2.25u)]}{\partial u^2} \Big|_{u=u(t)} = \frac{\partial}{\partial u} (2u + 2.25\lambda_2) \Big|_{u=u(t)} = 2 > 0$$

– нерівність виконується, тобто знайдено саме мінімум.

Згідно з рівнянням Ейлера-Лагранжа [14] отримуємо:

$$\begin{cases} \dot{\lambda}_1 = 0.1\lambda_1, \\ \dot{\lambda}_2 = -0.08\lambda_1 + 0.25\lambda_2. \end{cases} \quad (7)$$

Оскільки крайова умова для x_2 при $t = 30$ не задана, то запишемо умови трансверсальності:

$$\left. \frac{\partial F_1}{\partial \dot{x}_2} \right|_{t=30} = 0,$$

звідки

$$\lambda_2(30) = 0. \quad (8)$$

Об'єднуючи системи диференціальних рівнянь (3) і (7), при чому в (3) підставляємо вираз керування (6), отримаємо $2n$ -диференціальних рівнянь з крайовими умовами (4) та (8):

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = -0.1x_1(t) + 0.08x_2(t), & x_1(0) = 4, \\ \dot{x}_2(t) = -0.25x_2(t) - 2.53\lambda_2(t), & x_1(30) = 15, \\ \dot{\lambda}_1(t) = 0.1\lambda_1(t), & x_2(0) = 5, \\ \dot{\lambda}_2(t) = -0.08\lambda_1(t) + 0.25\lambda_2(t), & \lambda_2(30) = 0, \quad 0 \leq t \leq 30. \end{cases} \quad (9)$$

Це є двоточкова крайова задача, розв'язуючи яку отримаємо оптимальну траєкторію $x_2^*(x_1^*)$ та допоміжні ненульові функції $\lambda_1(t)$ та $\lambda_2(t)$. Останню підставляємо в рівняння (6) і отримаємо оптимальне програмне керування $u^*(t)$.

Як видно з порівняльних графіків, у системі з П-регулятором спостерігається статична похибка (рис. 1 б, в), а фазова траєкторія не досягає заданого значення $x_1(30) = 15$. Крім того, ресурс на керування більший в цій системі (рис. 1 а), що підтверджується значенням критерію керування:

$$\begin{aligned} I^* &= 121.2 \left(\kappa z / c \right)^2 \cdot c; \\ I_p &= 321.3 \left(\kappa z / c \right)^2 \cdot c. \end{aligned} \quad (10)$$

При цьому оптимальне програмне керування має вигляд:

$$u^* = 0.024e^{0.1t} - 0.001e^{0.25t}. \quad (11)$$

Адаптивна система оптимального керування в реальних умовах експлуатації об'єкта автоматизації. При використанні методів варіаційного числення для синтезу оптимального керування технологічними об'єктами не враховуються неточності в побудові математичної моделі та зовнішні збурення, які діють на об'єкт. Крім того, при експлуатації оптимальної системи керування змінюються параметри об'єкта або робоча точка, в оточенні якої лінеаризується математична модель. Все це призводить до зміщення дійсної траєкторії системи від оптимальної. Для подолання цього недоліку існує декілька підходів,

які описані в літературі [15]. Зокрема використовується зворотній зв'язок для корекції дійсної траєкторії та параметрів математичної моделі об'єкта.

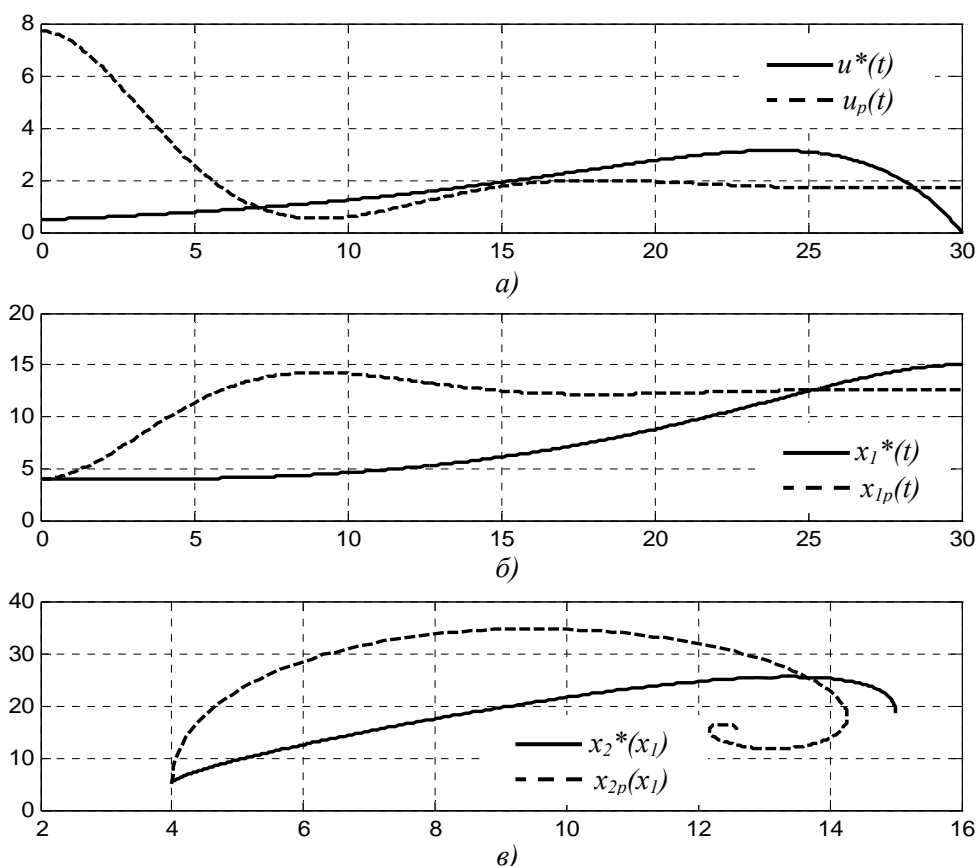


Рис. 1. Результати моделювання систем з оптимальним (*) та локальним П-регулятором (p)

На *рис. 2* наведено структурну схему оптимальної системи керування з корекцією оптимальної траєкторії. Тут адаптація відбувається в момент часу, коли реальна траєкторія суттєво відрізняється від оптимальної ($\varepsilon > \varepsilon_{\text{задане значення}}$), при цьому виконується перерахунок оптимальної траєкторії з новими початковими (поточними) умовами.

Другий підхід враховує як корекцію траєкторії, так і корекцію математичної моделі об'єкта та включає в себе блок ідентифікації параметрів моделі (див. *рис. 2*, показано пунктиром), що розраховує та корегує параметри моделі за пошуковими або безпошуковими алгоритмами.

Треба зауважити, що пристрій оптимального керування та його корекція не працює в реальному часі, а розрахунок траєкторії та програмного керування відбувається на початку експлуатації системи, а далі через відповідні моменти часу, що встановлюються оператором, відбувається корекція траєкторії та параметрів об'єкта.

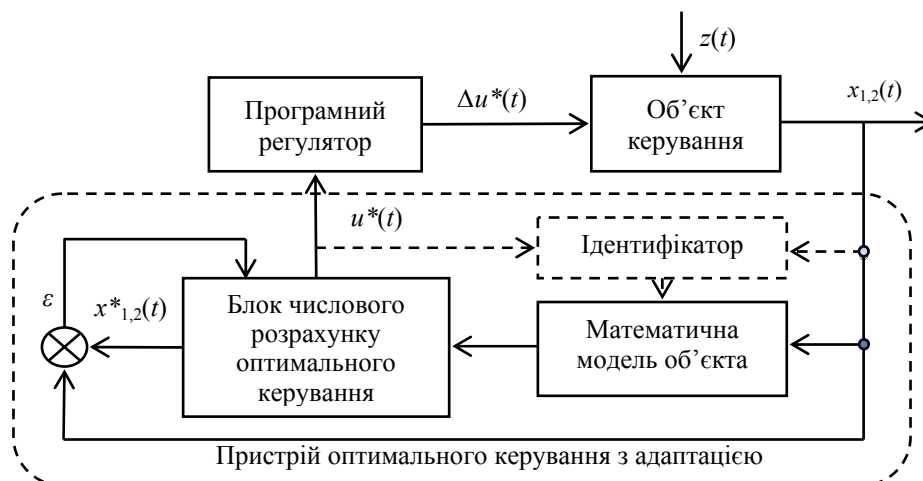


Рис. 2. Структура адаптивної системи оптимального керування

Висновки. Отримано розв'язок задачі оптимального керування технологічним агрегатом. На основі математичної моделі об'єкта за варіаційним методом задача оптимізації зводиться до розв'язку крайової задачі, з якої знаходяться оптимальні траєкторія та керування об'єктом (9), (11).

За результатами моделювання встановлено, що критерій керування в оптимальній системі зменшується майже в три рази (10), тобто зменшуються витрати теплоносіїв, а оптимальна траєкторія точно досягає заданого значення порівняно з локальною системою. Розроблено структуру адаптивної системи оптимального керування, за допомогою якої корегується оптимальна траєкторія в реальних умовах експлуатації об'єкта.

При застосуванні отриманих результатів є можливість ефективно використовувати виробничі ресурси та створюються умови для підвищення якості продуктів харчування.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Маркин Ю. П. Математические методы и модели в экономике / Ю. П. Маркин. — М. : Высш. шк., 2007. — 424 с.
2. Акулич И. Л. Математическое программирование в примерах и задачах / И. Л. Акулич. — М. : Высш. шк., 1986. — 319 с.
3. Алиев Р. А. Методы и алгоритмы координации в промышленных системах управления / Р. А. Алиев, М. И. Либерзон. — М. : Радио и связь, 1987. — 208 с.
4. Алиев Р. А. Методы интеграции в системах управления производством / Р. А. Алиев. — М. : Энергоатомиздат, 1989. — 271 с.
5. Волошин О. Ф. Моделі та методи прийняття рішень : навч. посіб. / О. Ф. Волошин, С. О. Мащенко. — К. : Вид.-полігр. центр "Київський університет", 2010. — 336 с.
6. Згуровський М. З. Основи системного аналізу / М. З. Згуровський, Н. Д. Панкратова. — К. : Вид. група ВНУ, 2007. — 546 с.

7. Федорчук Є. Н. Програмування систем штучного інтелекту. Експертні системи : навч. посіб. / Є. Н. Федорчук. — Л. : Вид-во Львів. політехніки, 2012. — 168 с.
8. Математичне програмування : навч. посіб. / [М. М. Глушик, І. М. Копич, О. С. Пенцак, В. М. Сороківський]. — Л. : Вид-во ЛКА, 2004. — 240 с.
9. Муромцев Д. Ю. Системы энергосберегающего управления : учеб. пособ. / Д. Ю. Муромцев, В. А. Погонин. — Тамбов : Изд-во Тамбовского гос. технического ун-та, 2006. — 92 с.
10. Денисенко В. В. Компьютерное управление технологическим процессом, экспериментом, оборудованием / В. В. Денисенко. — М. : Горячая линия — Телеком, 2009. — 608 с.
11. Сейдж Э. П. Оптимальное управление системами / Э. П. Сейдж, Ч. С. Уайт ; пер. с англ. ; под. ред. Б. Р. Левина. — М. : Радио и связь, 1982. — 392 с.
12. Петров Ю. П. Очерки истории теории управления / Ю. П. Петров. — СПб. : БХВ-Петербург, 2012. — 272 с.
13. Методы классической и современной теории автоматического управления : учеб. : в 5 т. — [2-е изд., перераб. и доп.]. — Т. 4 : Теория оптимизации систем автоматического управления ; под ред. К. А. Пупкова и Н. Д. Егупова. — М. : Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2004. — 744 с.
14. Hull D. G. Optimal Control Theory for Applications / D. G. Hull. — New York : Springer-Verlag, Inc., 2003. — 374 p.
15. Трегуб В. Г. Основы комп'ютерно-інтегрованого керування (Інтегровані автоматизовані системи керування) : навч. посіб. / В. Г. Трегуб. — К. : НУХТ, 2005. — 191 с.

Стаття надійшла до редакції 06.02.2015.

Lutska N., Savchenko T. Mathematical modeling of the control system of food production technological facility.

Background. Modern food industry demands high management system levels that implement the functions of planning, organization and management at all stages. Management should be done not of individual processes, units and stations, but of technological systems as a whole, that is, using the principles of integration and distributed control, which is the basis of computer-integrated manufacturing as a single system.

Technological complexes (TC) of food production in terms of management tasks are multidimensional.

After optimal planning one should move to optimization of each technological component of TC. Unlike the planning tasks, optimal control of technological units is performed in current time and takes into account the continuity of the process.

The aim of the study is creating conditions for increasing product quality and reducing energy by developing optimal control system of technology unit as part of TC, and the expected object adaptation to changing conditions.

Material and methods. Mathematical models of primary production planning have been analyzed. To solve the problem of optimal control of technological units variation method was used, which relies on the use of modern computer technology, and the theoretical basis was optimal systems control with concentrated and distributed parameters, identification and assessment of the state, sensitivity and manageability. The results are applicable to a wide class of real objects, which are described by differential, integral and other equations.

Results. The task of optimal management of technological object is reduced to the solution of two-point boundary problem, which results in optimum trajectory and program management. The inaccuracy in the construction of mathematical models and

change in model parameters lead to a shift in actual trajectory of optimal systems. It is proposed to use the feedback to adjust actual trajectory parameters and mathematical model of the object. As a result adaptive automated system of optimal control of technology unit was obtained.

Conclusion. An optimal solution to the problem of controlling the technological unit has been obtained. Based on the mathematical model of the object by variation method optimization is reduced to the solution of the boundary problem, which are optimal trajectory and facility control (9; 11).

It has been established according to the simulation results that the optimal control test system decreases almost three times (10), thus consumption of heat-releasing fluids is reduced, and the optimal trajectory accurately reaches the set value compared to the local system. The structure of adaptive system of optimal control has been developed by means of which optimal trajectory in actual operation of the facility is adjusted.

In the application of the results there is possibility to effectively use inputs and create conditions to improve food quality.

Keywords: technological complex, object, mathematical model, optimal control, optimal planning, criteria.

REFERENCES

1. *Markin Ju. P.* Matematicheskie metody i modeli v jekonomike / Ju. P. Markin. — M. : Vyssh. shk., 2007. — 424 s.
2. *Akulich I. L.* Matematicheskoe programmirovaniye v primerah i zadachah / I. L. Akulich. — M. : Vyssh. shk., 1986. — 319 s.
3. *Aliev R. A.* Metody i algoritmy koordinacii v promyshlennyh sistemah upravlenija / R. A. Aliev, M. I. Liberzon. — M. : Radio i svjaz', 1987. — 208 s.
4. *Aliev R. A.* Metody integracii v sistemah upravlenija proizvodstvom / R. A. Aliev. — M. : Jenergoatomizdat, 1989. — 271 s.
5. *Voloshyn O. F.* Modeli ta metody pryjnattja rishen' : navch. posib. / O. F. Voloshyn, S. O. Mashhenko. — K. : Vyd.-poligr. centr "Kyiv's'kyj universytet", 2010. — 336 s.
6. *Zgurovs'kyj M. Z.* Osnovy systemnogo analizu / M. Z. Zgurovs'kyj, N. D. Pankratova. — K. : Vyd. grupa BHV, 2007. — 546 s.
7. *Fedorchuk Je. N.* Programuvannja system shtuchnogo intelektu. Ekspertni systemy : navch. posib. / Je. N. Fedorchuk. — L. : Vyd-vo L'viv. politehniky, 2012. — 168 s.
8. *Matematychnje programuvannja : navch. posib. / [M. M. Glushyk, I. M. Kopych, O. S. Pencak, V. M. Sorokivs'kyj].* — L. : Vyd-vo LKA, 2004. — 240 s.
9. *Muromcev D. Ju.* Sistemy jenergosberegajushhego upravlenija : ucheb. posob. / D. Ju. Muromcev, V. A. Pogonin. — Tambov : Izd-vo Tambovskogo gos. tehničeskogo un-ta, 2006. — 92 s.
10. *Denisenko V. V.* Komp'juternoe upravlenie tehnologicheskim processom, jeksperimentom, oborudovaniem / V. V. Denisenko. — M. : Gorjachaja linija — Telekom, 2009. — 608 s.
11. *Sejdzh Je. P.* Optimal'noe upravlenie sistemami / Je. P. Sejdzh, Ch. S. Uajt ; per. s angl. ; pod. red. B. R. Levina. — M. : Radio i svjaz', 1982. — 392 s.
12. *Petrov Ju. P.* Ocherki istorii teorii upravlenija / Ju. P. Petrov. — SPb. : BHV-Peterburg, 2012. — 272 s.
13. *Metody klassičeskoj i sovremennoj teorii avtomatičeskogo upravlenija : ucheb. : v 5 t. — [2-e izd., pererab. i dop.].* — T. 4 : Teorija optimizacii sistem avtomatičeskogo upravlenija ; pod red. K. A. Pupkova i N. D. Egupova. — M. : Izd-vo MGTU im. N. Je. Bauman, 2004. — 744 s.
14. *Hull D. G.* Optimal Control Theory for Applications / D. G. Hull. — New York : Springer-Verlag, Inc., 2003. — 374 p.
15. *Tregub V. G.* Osnovy komp'juterno-integrovanogo keruvannja (Integrovani avtomatyzovani systemy keruvannja) : navch. posib. / V. G. Tregub. — K. : NUHT, 2005. — 191 s.